

Bài giảng

LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ



Ths. TRẦN QUỐC VIỆT

Gồm 2 phần chính:

Phần 1: Một số vấn đề cơ bản trong toán rời rạc

- Cơ sở logic
- Quan hệ
- Đại số Bool (tham khảo thêm)

Phần 2: Lý thuyết đồ thị

Chương 1

Cơ sở Logic

- Logic mệnh đề (Propositional logic)
- Logic vị từ: Predicate logic

Tài liệu tham khảo:

1. Toán rời rạc, Nguyễn Hữu Anh
2. Discrete Mathematics and Its Applications, Kenneth H Rosen
3. Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics,
Kenneth H Rosen

Cơ sở Logic

- q Toán học logic ứng dụng rất nhiều trong khoa học máy tính: Thiết kế mạch logic, các biểu thức điều kiện trong cấu trúc điều khiển của chương trình,...

- q Logic mệnh đề và Logic vị từ:
 - § **Logic mệnh đề (Logic bậc 0):** Không định lượng
Ví dụ: “Nếu trời mưa thì đất bị ướt”

 - § **Logic vị từ (Logic bậc 1):** Có định lượng
Ví dụ: “Mọi người rồi sẽ chết”
“Với mọi số thực a và b luôn tồn tại số thực x để:
 $|a|x - bx - 2 = 0$ ”

I. Mệnh đề và các phép toán logic

1. Một giá trị chân lý (chân trị): Là một giá trị đúng hoặc sai.

Kí hiệu:

§ T (hoặc 1): Đúng (true)

§ F (hoặc 0): Sai (false)

2. Mệnh đề (Proposition): là một diễn đạt có chân trị xác định: đúng hoặc sai (nhưng không thể vừa đúng lại vừa sai hoặc lúc đúng, có lúc lại sai)

Ví dụ 1.1:

"Mặt trời quay quanh trái đất"

" $3+1 = 5$ "

"Hà nội là thủ đô của Việt Nam"

"Sài gòn nằm ở miền bắc việt nam"

" $x+1=5$ nếu $x=1$ "

" $x + 2 = 8$ "

"Mấy giờ rồi?"

Các mệnh đề

Không phải
mệnh đề

I. Mệnh đề và các phép toán logic (tt)

Thường kí hiệu các mệnh đề bởi các kí tự hoa: P, Q, R,...

Ví dụ 1.2:

P: Hà Nội là Thủ Đô của Việt Nam

Q: Quy Nhơn thuộc tỉnh Bình Định

R: Việt nam thuộc châu Á

S: Long An là tỉnh thuộc khu vực miền trung của Việt nam.

4. Biến mệnh đề: Biến đại diện cho mệnh đề chưa biết trước, thường kí hiệu bởi các kí tự thường p, q, r, s,...

5. Bảng chân trị (Truth Table): Dùng để biểu diễn các sự kết hợp giữa các chân trị của các mệnh đề, xác định chân trị của mệnh đề phức hợp từ chân trị của các mệnh đề đơn giản hơn

I. Mệnh đề và các phép toán logic (tt)

6. Logic mệnh đề: (Logic bậc 0): Nghiên cứu về các mệnh đề logic và sự kết hợp giữa chúng bởi các phép nối logic

7. Các phép toán mệnh đề:

§ Dùng để tạo một mệnh đề phức hợp từ các mệnh đề đơn giản hơn

- o Phép phủ định (Negation operator)

- o Phép nối liền (Conjunction operator)

- o Phép nối rời (Disjunction operator)

- o Phép kéo theo (Implication operator)

- o Phép kéo theo hai chiều (Biconditional operator)

I. Mệnh đề và các phép toán logic (tt)

⌘ Phép phủ định (Negation operator)

Phủ định của mệnh đề P (kí hiệu $\neg P$: đọc là “Không P” hay “phủ định P”) là mệnh đề có chân trị 1 nếu P có chân trị 0 và có chân trị 0 nếu P có chân trị 1.

Bảng chân trị

P	$\neg P$
0	1
1	0

Ví dụ 1.3:

P: \equiv “Hà nội là thủ đô của Việt Nam”

$\neg P$: \equiv “Hà nội không phải là thủ đô của Việt Nam”

Q: \equiv “ $1-4 = 8$ ”

$\neg Q$: \equiv “ $1-4 \neq 8$ ”

I. Mệnh đề và các phép toán logic (tt)

□ Phép nối liền (Conjunction operator):

Phép nối liền giữa hai mệnh đề P và Q (kí hiệu $P \wedge Q$, đọc là “P và Q”) là mệnh đề có chân trị 1 nếu cả P và Q có chân trị 1 hoặc có chân trị 0 nếu ít nhất một trong 2 mệnh đề P hay Q có chân trị 0.

Bảng chân trị:

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

I. Mệnh đề và các phép toán logic (tt)

Ví dụ 1.4: “Hôm nay là chủ nhật **và** ngày mai là thứ 7” là một mệnh đề có chân trị 0.

Ví dụ 1.5: “Tổng các góc trong một tam giác bằng 180° **và** trong tam giác vuông có một góc 90° ” là mệnh đề có chân trị 1

Ví dụ 1.6: “Trong một tam giác cân có 2 cạnh bằng nhau **và** mặt trời quay quanh trái đất” là một mệnh đề có chân trị 0.

Ví dụ 1.7: “ $2=8 \wedge 3<9$ ” là mệnh đề có chân trị 0.

Ví dụ 1.8: “ $(2\leq 2) \wedge \neg(3>12)$ ” là mệnh đề có chân trị 1

I. Mệnh đề và các phép toán logic (tt)

⌘ Phép nối rời (Disjunction Operator):

Phép nối rời giữa hai mệnh đề P, Q (kí hiệu $P \vee Q$: đọc là “ P hay Q ”) là mệnh đề có chân trị 0 nếu cả P và Q có chân trị 0 hoặc có chân trị 1 nếu P có chân trị 1 hay Q có chân trị 1.

Bảng chân trị:

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

I. Mệnh đề và các phép toán logic (tt)

Ví dụ 1.9:

“(3 < 2) \vee (5 > 4)” là mệnh đề có chân trị ?

Ví dụ 1.10:

“Hà nội là thủ đô của Việt nam **hay** Hàn Quốc thuộc Châu âu” là mệnh đề có chân trị 1.

Ví dụ 1.11:

$[(12 < 6) \wedge (7 >= 3)] \vee (4 \leq 5)$ Là mệnh đề có chân trị ?

I. Mệnh đề và các phép toán logic (tt)

□ Phép kéo theo (Implication Operator)

Mệnh đề “Nếu P thì Q” (kí hiệu $P \rightarrow Q$: đọc là P kéo theo Q, hay P là điều kiện đủ của Q hay Q là điều cần của P) là mệnh đề có chân trị 0 nếu P có chân trị 1 và Q có chân trị 0, có chân trị 1 trong các trường hợp còn lại.

Bảng chân trị:

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

I. Mệnh đề và các phép toán logic (tt)

Ví dụ 1.12:

P: “Nếu $3 < 5$ thì Cá không thể sống dưới nước”

Chân trị

Q: “Nếu $2+1=4$ thì tổng các góc trong một tam giác bằng π ”.

Chân trị

R: “Nếu cá sống dưới nước thì cá biết bơi”:

Chân trị

S:≡“Nếu chúng ta không còn gì để ăn thì sáng mai mặt trời sẽ mọc”

Chân trị

“ $12 > 6 \rightarrow 9 = 5$ ” Là mệnh đề có chân trị ????

“ $(2=8 \vee 6 \leq 10) \rightarrow (1+2=3)$ là mệnh đề có chân trị ????

I. Mệnh đề và các phép toán logic (tt)

⌘ Phép kéo theo 2 chiều

Mệnh đề “Nếu P thì Q và ngược lại”, kí hiệu $P \leftrightarrow Q$ (còn đọc là “P nếu và chỉ nếu Q” hoặc “P khi và chỉ khi Q” hoặc “P là điều kiện cần và đủ để có Q”) có chân trị 1 nếu cả 2 mệnh đề P và Q có cùng chân trị, có chân trị 0 trong các trường hợp còn lại.

Bảng chân trị

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

I. Mệnh đề và các phép toán logic (tt)

Ví dụ 1.13: Phát biểu “ $(3 > 5) \leftrightarrow (9 = 8)$ ”

Là mệnh đề có chân trị 1

“ $(2 \leq 5) \leftrightarrow (12 < 6)$ ”

Là mệnh đề có chân trị 0

“Trái đất quay quanh mặt trời khi và chỉ khi Trung Quốc thuộc Châu Mỹ”

Là mệnh đề có chân trị ????

I. Mệnh đề và các phép toán logic (tt)

8. Dạng mệnh đề:

Dạng mệnh đề là một biểu thức Logic: hằng mệnh đề, biến mệnh đề hoặc kết hợp giữa chúng bởi các phép toán logic).

Ví dụ 1.14: Cho dạng mệnh đề theo 3 biến mệnh đề p ,

q : $E(p,q)=(p \wedge q) \rightarrow \neg p$

- ü Bản thân các dạng mệnh đề có thể chưa phải là mệnh đề.
- ü Nếu thay biến mệnh đề trong dạng mệnh đề bởi các mệnh đề thì dạng mệnh đề đó trở thành mệnh đề

I. Mệnh đề và các phép toán logic (tt)

Ví dụ 1.15: Cho dạng mệnh đề theo 3 biến p, q, r :

$$E(p, q, r) = (p \wedge q) \rightarrow \neg r$$

$E(p, q, r)$ chưa phải là mệnh đề (vì chân trị chưa được xác định). Nếu:

- Thay p bởi mệnh đề P : “ $3 > 5$ ”
- Thay q bởi mệnh đề Q : “ $2 < 9$ ”
- Thay r bởi mệnh đề R : “ $1 + 1 = 2$ ”

Thì dạng mệnh đề đã cho trở thành:

$$E(P, Q, R) = [(3 > 5) \wedge (2 < 9)] \rightarrow \neg(1 + 1 = 2)$$

Là một mệnh đề có chân trị 1.

I. Mệnh đề và các phép toán logic (tt)

- Bảng chân trị cho biết chân trị của dạng mệnh đề theo chân trị xác định của các biến mệnh đề.

Ví dụ 1.16: Bảng chân trị của dạng mệnh đề:

$$E(p,q,r)=(p \wedge q) \rightarrow \neg r$$

p	q	r	$p \wedge q$	$\neg r$	$(p \wedge q) \rightarrow \neg r$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

@Chú ý: Một dạng mệnh đề có n biến thì bảng chân trị có 2^n dòng

I. Mệnh đề và các phép toán logic (tt)

Ví dụ 1.17: Viết lại thành dạng mệnh đề và lập bảng chân trị cho diễn đạt: “Bạn được phép đi xe máy nếu bạn trên 16 tuổi và có sức khỏe tốt”.

Gọi: p: Bạn được phép đi xe máy.

q: Bạn trên 16 tuổi.

r: Bạn có sức khỏe tốt.

Dạng mệnh đề cho diễn đạt trên:

$$q \wedge r \rightarrow p.$$

Bảng chân trị (hình bên):

P	q	r	$q \wedge r$	$q \wedge r \rightarrow p$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

2. Tương đương logic & hệ quả logic

Định nghĩa:

- ü Hai dạng mệnh đề *E* và *F* **tương đương logic** nếu chúng có cùng bảng chân trị. Kí hiệu $E \Leftrightarrow F$ (còn đọc là “E tương đương logic với F” hoặc “F tương đương Logic với E”).
- ü Dạng mệnh đề gọi là ***hằng đúng*** nếu nó luôn có chân trị 1 với mọi giá trị của các biến mệnh đề thành phần
- ü Dạng mệnh đề gọi là ***hằng sai*** (hay còn gọi là ***mâu thuẫn***) nếu nó luôn có chân trị 0 với mọi giá trị của các biến thành phần.
- ü E và F tương đương logic khi và chỉ khi $E \Leftrightarrow F$ là một hằng đúng.
- ü F là hệ quả logic của E (kí hiệu $E \Rightarrow F$) nếu $E \rightarrow F$ là hằng đúng.

Tương đương logic & hệ quả logic (tt)

Ví dụ 2.1: Chứng minh $\neg(p \rightarrow q) \Rightarrow p$.

Xét dạng mệnh đề $E(p,q) = [\neg(p \rightarrow q)] \rightarrow p$

Bảng chân trị của $E(p,q)$:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$[\neg(p \rightarrow q)] \rightarrow p$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	1

Ta thấy chân trị của dạng mệnh đề $[\neg(p \rightarrow q)] \rightarrow p$ luôn là 1.

Vậy: $[\neg(p \rightarrow q)] \Rightarrow p$ hay dạng mệnh đề $[\neg(p \rightarrow q)] \rightarrow p$ là hằng đúng.

Tương đương logic & hệ quả logic (tt)

Ví dụ 2.1: Dùng bảng chân trị chứng minh:

$$[(q \wedge r) \rightarrow p] \Leftrightarrow (\neg q \vee \neg r \vee p)$$

Bước 1: Lập bảng chân trị của dạng mệnh đề: $E(p,q,r)=[(q \wedge r) \rightarrow p] \Leftrightarrow (\neg q \vee \neg r \vee p)$

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$(q \wedge r)$	$(q \wedge r) \rightarrow p$	$\neg q \vee \neg r \vee p$	$E(p,q,r)$
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1

Bước 2: Kiểm tra bảng chân trị, $E(p,q,r)$ có chân trị 1 với mọi p,q,r nên $[(q \wedge r) \rightarrow p] \Leftrightarrow (\neg q \vee \neg r \vee p)$

Tương đương logic & hệ quả logic (tt)

Ⓟ Quy tắc thay thế thứ nhất

Trong một dạng mệnh đề, nếu thay thế một biểu thức con bởi một dạng mệnh đề tương đương logic thì được dạng mệnh đề mới vẫn tương đương logic dạng mệnh đề ban đầu.

Ví dụ 2.2: Cho dạng mệnh đề: $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

Do $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ nên theo quy tắc thay thế thứ nhất, ta có:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \rightarrow r$$

Tương đương logic & hệ quả logic (tt)

⌘ Quy tắc thay thế thứ 2:

Giả sử dạng mệnh đề $E(p_1, p_2, \dots)$ là hằng đúng, Nếu thay thế thành phần p_i trong E bởi một dạng mệnh đề bất kỳ thì cũng nhận được dạng mệnh đề kết quả là hằng đúng.

Ví dụ 2.3: Cho dạng mệnh đề: $E(p,q) = (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

Ta đã chứng minh được $E(p,q)$ là hằng đúng.

Thay p bởi $r \vee s$, ta được dạng mệnh đề:

$$E'(r,s,q) = [(r \vee s) \rightarrow q] \leftrightarrow [\neg(r \vee s) \vee q]$$

Theo quy tắc thay thế thứ 2, ta có $E'(r,s,q)$ cũng là hằng đúng.

Tương đương logic & hệ quả logic (tt)

p *Các luật Logic:* Với p, q, r và s là các biến mệnh đề.
Ta có các tương đương logic sau:

1. Phủ định kép (Double negation)

$$\neg\neg p \Leftrightarrow p$$

2. Quy tắc De Morgan (DeMorgan's Rules)

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

3. Luật giao hoán (Commutative Rules)

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

Các luật logic (tt)

4. Luật kết hợp (Associative Rules)

$$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$

$$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

5. Luật phân phối (Distributive Rules)

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

6. Luật lũy đẳng (Idempotent Rules)

$$p \wedge p \Leftrightarrow p$$

$$p \vee p \Leftrightarrow p$$

Các luật logic (tt)

7. Luật trung hòa

$$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$$

$$p \vee 0 \Leftrightarrow p$$

8. Luật phần tử bù (Negation rules)

$$p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$$

$$p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$$

9. Luật thống trị

$$p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$$

$$p \vee 1 \Leftrightarrow 1$$

10. Luật hấp thụ (absorption rules)

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$

$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

Các luật logic (tt)

Ví dụ 2.4: Không dùng bảng chân trị, kiểm tra xem dạng mệnh đề sau có phải là hằng đúng:

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow [\neg p \vee (p \wedge q)]$$

Giải:???

Ví dụ 1.4.4: Dùng các luật logic kiểm tra dạng mệnh đề sau có phải là hằng đúng.

$$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$$

Giải ???:

3. Các quy tắc suy diễn

⊢ Phương pháp khẳng định (Modus Ponens)

Được thể hiện bởi hằng đúng: $[(p \supset q) \wedge p] \supset q$

Ví dụ 3.1: Diễn đạt:

Nếu trời mưa thì buổi biểu diễn ca nhạc bị hủy bỏ. Mà trời mưa

Vậy: Buổi biểu diễn ca nhạc bị hủy bỏ.

Là diễn đạt đúng (phương pháp khẳng định).

⊢ Viết lại bằng kí hiệu logic:

Đặt p : “Trời mưa”;

q : “Buổi biểu diễn ca nhạc bị hủy bỏ”

Diễn đạt được viết lại:

$$\frac{p \supset q \quad p}{\therefore q}$$

(phương pháp khẳng định)

Các quy tắc suy diễn (tt)

⌞ Tam đoạn luận

Thể hiện bởi hằng đúng: $[(p \supset q) \wedge (q \supset r)] \supset (p \supset r)$

Ví dụ 3.2: Nếu trời mưa thì buổi hòa nhạc bị hủy bỏ

Nếu buổi hòa nhạc bị hủy bỏ thì vé được trả lại cho khán giả

Vậy: Nếu trời mưa thì vé được trả lại cho khán giả (Tam đoạn luận)

Ví dụ 3.3: A, B và C là 3 cầu thủ của đội bóng, huấn luyện viên quy định:

Nếu A tham gia trận đấu thì B không được tham gia

Nếu B không được tham gia trận đấu thì C cũng không được tham gia

Vậy: Nếu A tham gia trận đấu thì C không được tham gia (Tam đoạn luận)

Các quy tắc suy diễn (tt)

⊖ Phương pháp phủ định (quy tắc Modus Tollens)

Thể hiện bởi hằng đúng: $[(p \supset q) \wedge \neg q] \supset \neg p$

Ví dụ 3.4: Diễn đạt:

“Nếu đội A thắng đội B thì đội A được huy chương vàng, mà đội A không đạt được huy chương vàng. Vậy đội A không thắng đội B.”

Là diễn đạt đúng (Phương pháp phủ định)

Viết lại ở dạng dùng các kí hiệu Logic

Đặt p: Đội A thắng đội B, q: Đội A đạt huy chương vàng. Diễn đạt được viết lại:

$$\frac{p \supset q \\ \neg q}{\therefore \neg p}$$

Phương pháp phủ định

Các quy tắc suy diễn (tt)

Ví dụ 3.5: Cho diễn đạt:

Nếu An học chăm thì An được xếp hạng cao trong học tập
Mà An không được xếp hạng cao.

Vậy An không học chăm (Phương pháp phủ định).

Viết một cách hình thức cho suy diễn trên như sau:

Gọi p: “An học chăm”

q: “An được xếp hạng cao trong học tập”

Ta có: $p \rightarrow q$ (tiền đề)

$\neg q$ (tiền đề)

$\therefore \neg p$ (Phương pháp phủ định)

Các quy tắc suy diễn

⊢ **Tam đoạn luận rời:** Cho bởi hằng đúng

$$[(p \dot{\cup} q) \dot{\cup} \neg p] \textcircled{R} q$$

Ví dụ 3.6: Giả sử có cuộc thi điền kinh với 2 người tham gia là A và B.

A phải đạt giải nhất hoặc B phải đạt giải nhất

mà: A không đạt giải nhất

Vậy: B phải đạt giải nhất (tam đoạn luận rời)

Các quy tắc suy diễn (tt)

Ⓟ Quy tắc mâu thuẫn (phản chứng)

Ta có tương đương logic sau:

$$[(p_1 \hat{\cup} p_2 \hat{\cup} \dots \hat{\cup} p_n) \hat{\cup} q] \hat{\cup} [(p_1 \hat{\cup} p_2 \hat{\cup} \dots \hat{\cup} p_n \hat{\cup} \neg q) \hat{\cup} 0]$$

Ví dụ 3.7: Chứng minh: $(p \wedge q) \rightarrow p$ là hằng đúng.

Giải:

Ta có: $[(p \wedge q) \rightarrow p] \hat{\cup} [(p \wedge q \wedge \neg p) \rightarrow 0]$ (phản chứng)

$\hat{\cup} [[(p \wedge \neg p) \wedge q] \rightarrow 0]$ (Luật giao hoán, kết hợp)

$\hat{\cup} [(0 \wedge q) \rightarrow 0]$ (Luật phần tử bù)

$\hat{\cup} [0 \rightarrow 0]$ (Luật thống trị)

$\hat{\cup} 1$ (Theo định nghĩa phép kéo theo)

Vậy $(p \wedge q) \rightarrow p$ là hằng đúng.

Các quy tắc suy diễn (tt)

▫ Quy tắc chứng minh theo trường hợp: Khẳng định sau là đúng:

$$[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \rightarrow r].$$

Ví dụ 3.8: Xét diễn đạt: "Nếu sinh viên là đoàn viên thì sinh viên đó phải tham dự cuộc họp, nếu sinh viên thuộc ban cán sự lớp thì sinh viên đó cũng phải tham dự cuộc họp. Vậy, nếu sinh viên là đoàn viên hay thuộc ban cán sự lớp thì sinh viên đó phải tham dự cuộc họp" Là diễn đạt đúng (quy tắc chứng minh theo trường hợp)

Một số ví dụ khác

Ví dụ 3.9: Hãy chỉ ra các luật logic sử dụng trong việc rút gọn dạng mệnh đề: $(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)$ như sau:

$$(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) \quad (\text{De Morgan})$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \quad (\text{phủ định kép})$$

$$\Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge p] \vee [(p \vee q) \wedge \neg q] \quad (?)$$

$$\Leftrightarrow p \vee [(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q)] \quad (?)$$

$$\Leftrightarrow p \vee [(p \wedge \neg q) \vee 0] \quad (?)$$

$$\Leftrightarrow p \vee (p \wedge \neg q) \quad (?)$$

$$\Leftrightarrow p \quad (?)$$

(Có cách rút gọn đơn giản hơn?)

Một số ví dụ

- ⌘ Từ nhận xét trên, ta có 2 đoạn chương trình trên (viết bằng Java) là tương đương:

```
if ((p || q) && (!(!p && q)))  
{  
    Thực hiện S;  
}
```

```
if (p)  
{  
    Thực hiện S;  
}
```

Ví dụ 3.10: Chứng minh $[(p \wedge q) \rightarrow r] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$
(bài tập)

Một số ví dụ

p Từ đó, ta có 2 đoạn chương trình sau là tương đương:

```
if (p && q)
    r;
```

```
if (p)
    if (q)
        r;
```

Lưu ý: r ở đây là nhóm lệnh

```
z=0;
for (int i=1; i<=10; i++)
{
    x = i+2;
    y=i-1;
    if ((x>=10) && (y<=8))
        z+=1;
}
```

(a)

```
z=0;
for (int i=1; i<=10; i++)
{
    x = i+2;
    y=i-1;
    if (x>=10)
        if (y<=8))
            z+=1;
}
```

(b)

Một số ví dụ

Ví dụ 3.11: Diễn đạt sau có là đúng không?:

$$p \wedge q$$

$$p \rightarrow (r \wedge q)$$

$$r \rightarrow (s \vee t)$$

$$\neg s$$

$$\therefore t$$

Ta có:	$p \wedge q$	(tiền đề)
nên	p	(Đơn giản nối liền)
Và	$p \rightarrow (r \wedge q)$	(...)
Nên	$r \wedge q$	(...)

Một số ví dụ

Suy ra	r	(...)
Hơn nữa	$r \rightarrow (s \vee t)$	(...)
nên	$s \vee t$	(...)
Mà	$\neg s$	(...)
Nên	$\therefore t$	(...)

Ví dụ 3.12: a,b,c,d và e là 5 thành viên trong một đội bóng. Giả sử huấn luyện viên có các quy định như sau:

- ü Nếu b không tham gia vào trận đấu thì a cũng không tham gia.
- ü Nếu b tham gia vào trận đấu thì c cũng tham gia
- ü Nếu c tham gia vào trận đấu thì d cũng tham gia
- ü Nếu trong trận đấu sắp tới cả 2 cầu thủ d và e đều không tham gia thì a có tham gia không? c có tham gia không?

Một số ví dụ

Ví dụ 3.13: Nhà trường muốn chọn 2 trong số 5 sinh viên A,B,C,D và E để trao học bổng. Sau khi tham khảo, nhà trường có các đề nghị sau đây:

1. Chọn B và C.
2. Không chọn C và cũng không chọn D.
3. Chọn A và C.
4. Nếu không chọn A thì cũng không chọn B.
5. Nếu chọn E thì không chọn D.

Sau khi quyết định, người ta thấy đề nghị 4 sai, 4 đề nghị còn lại có 3 đề nghị đúng, 1 đề nghị sai. Hãy xác định 2 sinh viên được trao học bổng.

4. Logic vị từ

q Vi từ:

Vị từ là một khẳng định có dạng $p(x,y,z,\dots)$ trong đó x, y, z,\dots là các biến lấy giá trị trong các tập hợp A, B, C,\dots cho trước sao cho:

- n $p(x,y,z,\dots)$ không phải là mệnh đề
 - n Nếu thay x,y,z,\dots bởi các phần tử cố định nhưng tùy ý $a \in A, b \in B, c \in C,\dots$ ta được mệnh đề $p(a,b,c,\dots)$.
- x, y, z,\dots gọi là các biến tự do

Logic vị từ (tt)

Ví dụ 4.1:

§ Cho $n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ = “ n chia hết cho 3.”

$p(n)$: Không phải là mệnh đề. Nhưng:

$p(10)$: là mệnh đề có chân trị 0

$p(15)$: là mệnh đề có chân trị 1

$p(n)$ là một vị từ theo biến $n \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 4.2:

$p(x,y)$ = “ $x^2 + y^2 > 5$ ” là một vị từ theo 2 biến $x, y \in \mathbb{R}$.

$p(n)$ = “ n là số nguyên tố” là vị từ theo biến $n, n \in \mathbb{N}$

Logic vị từ (tt)

Định nghĩa: Cho $p(x)$, $q(x)$ là các vị từ theo một biến $x \in A$.

i) Phép phủ định: $\neg p(x)$ là một vị từ sao cho với $x=a \in A$ cố định nhưng tùy ý thì $\neg p(a)$ là phủ định của $p(a)$.

ii) Phép nối liền: $p(x) \wedge q(x)$ là vị từ theo biến x mà khi thay x bởi $a \in A$ cố định nhưng tùy ý thì được mệnh đề $p(a) \wedge q(a)$

iii) Phép nối rời: $p(x) \vee q(x)$ là vị từ theo biến x mà khi thay x bởi $a \in A$ cố định nhưng tùy ý thì được mệnh đề $p(a) \vee q(a)$

iv) Phép kéo theo: $p(x) \rightarrow q(x)$ là vị từ theo biến x mà khi thay x bởi $a \in A$ cố định nhưng tùy ý thì được mệnh đề $p(a) \rightarrow q(a)$

v) Phép kéo theo 2 chiều: $p(x) \leftrightarrow q(x)$ là vị từ theo biến x mà khi thay x bởi $a \in A$ cố định nhưng tùy ý thì được mệnh đề $p(a) \leftrightarrow q(a)$

Logic vị từ (tt)

q Lượng từ:

Cho vị từ $p(x)$, $x \in A$. Có 3 trường hợp xảy ra:

- o Với mọi $a \in A$, mệnh đề $p(a)$ đúng. Kí hiệu “ $\forall a \in A, p(a)$ ”
- o Với một số giá trị $a \in A$ (không cần phải tất cả), mệnh đề $p(a)$ đúng. Kí hiệu: “ $\exists a \in A, p(a)$ ”
- o Với mọi $a \in A$, mệnh đề $p(a)$ sai. Kí hiệu:
“ $\forall a \in A, \neg p(a)$ ”

Định nghĩa: Các mệnh đề “ $\forall x \in A, p(x)$ ” và “ $\exists x \in A, p(x)$ ” gọi là lượng từ hóa của $p(x)$ bởi lượng từ phổ dụng \forall và lượng từ tồn tại \exists .

Ngoài ra, còn có lượng từ: $\exists!$ (tồn tại duy nhất)

Vị từ và lượng từ

Ví dụ 4.3: Giả sử ta có diễn đạt: “Mọi người rồi sẽ chết”

Nếu: Gọi $A = \{\text{các con người}\}$

Và p là một vị từ: $p = \text{'x sẽ chết'}$

Diễn đạt trên có thể viết lại ở dạng mệnh đề lượng từ hóa:

$$\forall x \in A, p(x)$$

Ví dụ 4.4: Xét diễn đạt:” Mọi sinh viên là đoàn viên đều phải tham gia chiến dịch mùa hè xanh”

Nếu gọi $A = \{\text{Tập các sinh viên}\}$

Và p, q là các vị từ: $p = \text{'x là đoàn viên'}$

$q = \text{'x phải tham gia chiến dịch mùa hè xanh'}$

Diễn đạt trên có thể viết lại ở dạng mệnh đề lượng từ hóa như sau:

$$\forall x \in A, p(x) \rightarrow q(x)$$

Logic vị từ (tt)

Tóm tắt ý nghĩa các lượng từ của các vị từ 1 biến:

Mệnh đề	Đúng khi:	Sai khi:
$\forall x, p(x)$	$p(x)$ đúng với mọi x	Có một giá trị x , $p(x)$ sai
$\exists x, p(x)$	Có một giá trị x , $p(x)$ đúng	$p(x)$ sai với mọi x

Ví dụ 2.1.4: Cho biết chân trị của các mệnh đề sau:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 - 1 > 0) \rightarrow (3x + 2 > 2)$

b) $\forall k \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R}, -3x^2 + kx + 1 = 0$

Logic vị từ (tt)

Tóm tắt ý nghĩa các lượng từ của các vị từ 1 biến:

Mệnh đề	Đúng khi:	Sai khi:
$\forall x, p(x)$	$p(x)$ đúng với mọi x	Có một giá trị x , $p(x)$ sai
$\exists x, p(x)$	Có một giá trị x , $p(x)$ đúng	$p(x)$ sai với mọi x

Định lý:

Phủ định của mệnh đề lượng từ hóa của vị từ $p(x,y,z,\dots)$ bởi các lượng từ là một mệnh đề có được bằng cách thay lượng từ \forall bằng lượng từ \exists và thay lượng từ \exists bằng lượng từ \forall và thay vị từ $p(x,y,z,\dots)$ bằng vị từ $\neg p(x,y,z,\dots)$

$$\text{Ví dụ: } \neg (\forall x \exists y, p(x,y)) \Leftrightarrow \exists x \forall y, \neg p(x,y)$$

Mệnh đề	Mệnh đề tương đương	Đúng khi:
$\neg(\forall x, p(x))$	$\exists x, \neg p(x)$	Có một giá trị x , $p(x)$ sai
$\neg(\exists x, p(x))$	$\forall x, \neg p(x)$	$p(x)$ sai với mọi x

Logic vị từ (tt)

Bảng tóm tắt ý nghĩa các lượng từ trên các vị từ hai biến

Mệnh đề	Đúng khi:	Sai khi:
$\forall x \forall y, p(x,y)$	P(x,y) đúng với mọi cặp x,y	Có một cặp x, y mà p(x,y) sai
$\forall x \exists y, p(x,y)$	Với mọi x có một y để p(x,y) đúng	Có một x để p(x,y) sai với mọi y
$\exists x \forall y, p(x,y)$	Có một x để p(x,y) đúng với mọi y	Với mọi x có một y để p(x,y) sai
$\exists x \exists y, p(x,y)$ $\exists y \exists x, p(x,y)$	Có một cặp x, y để p(x,y) đúng	P(x,y) sai với mọi cặp x,y

Một số ví dụ

Ví dụ 4.4: Tìm chân trị của các mệnh đề:

a) $\forall x \in (0,1), x^3 + 4x^2 - 1 = 0$

b) $\exists x \in (0,1), x^3 + 4x^2 - 1 = 0$

Ví dụ 4.5: Với $x \in \mathbb{R}$, xét các vị từ:

$p(x): x \geq 0$

$q(x): x^2 \geq 0$

$r(x): x^2 - 4x - 5 = 0$

$s(x): x^2 - 3 \geq 0$

Xét xem các mệnh đề sau là đúng hay sai?

a) $\exists x, p(x) \wedge r(x)$

b) $\forall x, p(x) \rightarrow r(x)$

c) $\forall x, p(x) \rightarrow q(x)$

d) $\forall x, q(x) \rightarrow s(x)$

e) $\forall x, r(x) \rightarrow p(x)$

f) $\exists x, r(x) \rightarrow q(x)$

Logic vị từ (tt)

Định lý:

Cho $p(x,y)$ là vị từ theo 2 biến x, y . Các mệnh đề sau là hằng đúng:

$$i) [\forall x \in A, \forall y \in B, p(x,y)] \leftrightarrow [\forall y \in B, \forall x \in A, p(x,y)]$$

$$i) [\exists x \in A, \exists y \in B, p(x,y)] \leftrightarrow [\exists y \in B, \exists x \in A, p(x,y)]$$

$$i) [\exists x \in A, \forall y \in B, p(x,y)] \rightarrow [\forall y \in B, \exists x \in A, p(x,y)]$$

Quy tắc đặc biệt hóa phổ dụng:

$\forall x \in A, p(x)$ đúng thì $p(a)$ đúng với $a \in A$, a cố định nhưng bất kỳ.

Quy tắc tổng quát hóa phổ dụng:

Nếu $p(a)$ đúng với $a \in A$ bất kỳ thì mệnh đề: $\forall x \in A, p(x)$ đúng.

4. Logic vị từ (tt)

␣ Mệnh đề:

Trong mệnh đề lượng từ hóa của vị từ $p(x,y,z,\dots)$. Nếu ta hoán vị 2 lượng từ liền kề thì ta được:

- ␣ Mệnh đề mới tương đương với mệnh đề cũ nếu 2 lượng từ được hoán vị có cùng loại.
- ␣ Mệnh đề mới là hệ quả logic của với mệnh đề cũ nếu 2 lượng từ được hoán vị có dạng $\exists\forall$.

4. Logic vị từ (tt)

Ví dụ 5.6: Cho $A = \{x \text{ là sinh viên}\}$

$p(x)$: “ x là sinh viên khoa CNTT”

$q(x)$: “ x phải học toán rời rạc”.

Coi lý luận:

Mọi sinh viên khoa CNTT đều phải học toán rời rạc

Mà Cường là sinh viên khoa CNTT, nên Cường phải học toán rời rạc

Viết dạng logic vị từ:

Gọi $a \equiv$ “Cường là một sinh viên” ($a \in A$)

Do $\forall x \in A, p(x) \rightarrow q(x)$ (tiên đề)

nên $p(a) \rightarrow q(a)$ (đặc biệt hóa phổ dụng)

Mà $p(a)$ (Tiên đề)

nên: $q(a)$ (pp khẳng định)

Mà Cường là sinh viên khoa CNTT, nên Cường phải học toán rời rạc

A: “Cường là sinh viên khoa CNTT”

4. Logic vị từ (tt)

Ví dụ 5.7: Chứng minh:

$$\begin{array}{l} \forall x, [p(x) \rightarrow q(x)] \\ \forall x, [q(x) \rightarrow r(x)] \\ \hline \therefore \forall x, [p(x) \rightarrow r(x)] \end{array}$$

Ta có:

$$\forall x, [p(x) \rightarrow q(x)] \quad (\text{tiền đề})$$

$$\forall x, [q(x) \rightarrow r(x)] \quad (\text{tiền đề})$$

Với a bất kỳ nhưng cố định ta có:

$$p(a) \rightarrow q(a) \quad (\text{đặc biệt hóa phổ dụng})$$

$$q(a) \rightarrow r(a) \quad (\text{đặc biệt hóa phổ dụng})$$

$$p(a) \rightarrow r(a) \quad (\text{tam đoạn luận})$$

$$\text{Vậy: } \forall x, [p(x) \rightarrow r(x)] \quad (\text{tổng quát hóa phổ dụng})$$

4. Logic vị từ (tt)

Ví dụ 4.8: Chứng minh:

$$\forall x, [p(x) \vee q(x)]$$

$$\forall x, [(p(x) \wedge q(x)) \rightarrow r(x)]$$

$$\forall x, \neg r(x)$$

$$\therefore \forall x, p(x)$$

4. Logic vị từ (tt)

Ví dụ 4.9: Chứng minh:

$A = \{\text{Các tam giác}\}$

$p(x)$: x có 2 cạnh bằng nhau

$q(x)$: x là tam giác cân

$r(x)$: x có 2 góc bằng nhau

Diễn đạt: "Nếu tam giác không có 2 góc bằng nhau thì tam giác này không có 2 cạnh bằng nhau. Đúng hay sai?"

5. Nguyên lý quy nạp:

Để chứng minh $p(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq n_0$. Ta có thể dùng nguyên lý quy nạp như sau:

- § Kiểm chứng $p(n_0)$ đúng
- § Nếu $p(n)$ đúng ($n \geq n_0$) thì $p(n+1)$ đúng
- § Kết luận: $p(n)$ đúng $\forall n \geq n_0$

Nghĩa là sử dụng suy diễn sau:

$$p(n_0)$$

$$\forall n > n_0, p(n) \rightarrow p(n+1)$$

$$\therefore \forall n \geq n_0, p(n)$$

Nguyên lý quy nạp (tt)

Ví dụ 5.1: Chứng minh rằng:

$$1.1! + 2.2! + \dots + n.n! = (n+1)! - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Giải: Đặt: $p(n) = "1.1! + 2.2! + \dots + n.n! = (n+1)! - 1"$

Ta có: $p(1) = "1.1! = (1+1)! - 1"$ đúng

Giả sử $p(n)$ với $n \geq 1$ đúng, ta cần chứng minh $p(n+1)$ cũng đúng.

Do $p(n)$ đúng nên:

$$1.1! + 2.2! + \dots + n.n! = (n+1)! - 1$$

$$\Leftrightarrow 1.1! + 2.2! + \dots + n.n! + (n+1).(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1).(n+1)!$$

$$\Leftrightarrow 1.1! + 2.2! + \dots + n.n! + (n+1).(n+1)! = (n+1)!(1+n+1) - 1$$

$$\Leftrightarrow 1.1! + 2.2! + \dots + n.n! + (n+1).(n+1)! = (n+2)! - 1$$

Vậy $p(n+1)$ cũng đúng. Theo nguyên lý quy nạp, ta có: $\forall n \geq 1, p(n)$ đúng.

Nguyên lý quy nạp (tt)

Ví dụ 5.2: Số tiền có được sau n tháng tiết kiệm được cho bởi công thức:

$$fv = pv \cdot (1 + \text{rate})^n.$$

Trong đó:

pv: Số tiền gửi.

rate: Lãi suất mỗi tháng.

n: Số tháng gửi.

chương trình:

```
v=pv;
while (n>0) {
    v=v*(1+rate);
    n--;
}
fv=v;
```

Chứng minh tính đúng đắn của chương trình (nghĩa là sau khi ra khỏi vòng lặp, biến v có giá trị $v \cdot (1 + \text{rate})^n$, với $v = pv$)

Nguyên lý quy nạp (tt)

Xét vị từ $p(n)$: “bắt đầu vòng lặp với $v=pv$, rate, n thì khi kết thúc chương trình, giá trị mới của v là: $pv^*(1+rate)^n$ ”.

Ta cần chứng minh $p(n)$ đúng $\forall n \in \mathbb{N}$.

ü Với $n = 0$, không thực hiện bất kỳ lần lặp nào, do đó v có giá trị $v = v^*(1+rate)^0$, Với $fv = v = pv$. Nghĩa là $p(0)$ đúng.

ü Giả sử với $n=k$, $p(k)$ đúng. Nghĩa là nếu bắt đầu vòng lặp với các giá trị $v=pv$, rate, k thì sau khi kết thúc vòng lặp giá trị mới của v là $v^*(1+rate)^k = pv^*(1+rate)^k$.

ü Ta chứng minh $p(k+1)$ cũng đúng?

Nguyên lý quy nạp (tt)

Vì $k+1 > k \geq 0$, nên vòng lặp được lặp nhiều hơn khi $n=k$ là 1 lần.

Sau lần lặp đầu tiên, v có giá trị $v^*(1+rate) = pv^*(1+rate)$ và $n = k$.

Bắt đầu phần lặp còn lại với $v=pv^*(1+rate)$, $rate$, k , sau khi kết thúc vòng lặp, giá trị mới của v là:

$$\begin{aligned} & v^*(1+rate)^k \text{ (do giả thiết quy nạp)} \\ & = pv^*(1+rate)^*(1+rate)^k = pv^*(1+rate)^{k+1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow p(k+1)$ đúng

Theo nguyên lý quy nạp, $p(n)$ đúng $\forall n \in \mathbb{N}$.

Bài tập

Bài 1: Viết dạng phủ định (bằng biểu thức logic và diễn bằng ngôn ngữ tự nhiên) của các dạng mệnh đề sau:

- a) Nếu P là hình ngũ giác thì P là hình đa giác
- b) Nếu Tom là cha của Ann, thì Jim là chú của Ann, Sue là cô của Ann và Mary là em họ của cô ấy.

Bài 2: Viết 2 phát biểu khác nhau sử dụng “phép kéo theo” có nghĩa tương đương với phát biểu “Học C là điều kiện cần thiết để học C++”

Bài tập

Bài 3: Cho dạng mệnh đề: $(\neg p \vee q) \rightarrow (r \vee \neg q)$ biến đổi dạng mệnh đề này thành dạng mệnh đề tương đương chỉ sử dụng các phép nối logic \neg và \wedge

Bài 4: Các phát biểu nào sau đây tương đương với phát biểu “Nếu n chia hết cho 30 thì n chia hết cho 2, 3 và 5”:

- a) Nếu n không chia hết cho 30 thì n chia hết cho 2 hoặc n chia hết cho 3 hoặc n chia hết cho 5
- b) Nếu n không chia hết cho 30 thì n không chia hết cho 2 hoặc không chia hết cho 3 hoặc không chia hết cho 5
- c) Nếu n chia hết cho 2, cho 3 và cho 5 thì n chia hết cho 30.
- d) Nếu n không chia hết cho 2 hoặc không chia hết cho 3 hoặc không chia hết cho 5 thì n không chia hết cho 30

Bài tập

Bài 5: Chứng minh dạng mệnh $(p \leftrightarrow r) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$ tương đương logic với dạng mệnh đề:

$$\neg[(\neg p \vee r) \wedge (p \vee \neg r)] \wedge [(\neg q \vee r) \wedge (q \vee \neg r)]$$

Bài 6: Cho biết chân trị của các mệnh đề sau nếu không gian khảo sát là tập các số nguyên:

q $\forall n, (n^2 \geq 0)$

q $\exists n \forall m, (n < m^2)$

q $\forall n \exists m, (m+n = 0)$

q $\exists n \exists m (n+m=4 \wedge n-m = 1)$

q $\forall n \forall m \exists p (p=(m+n)/2)$

Bài tập

p Bài 7: Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề sau:

n $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$

n $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}, x+y \neq y+x$

n $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}, (x+2y = 2) \wedge (2x+4y=5)$

n $\exists x \in \mathbb{R}, 2x^2+3x-5 = 0$

n $\forall x \in \mathbb{R}, (3x^2+4x+5 = 0) \rightarrow (2x^3+3x-1=0)$

n $\forall x \in [0,5], 2/3 \cdot x^3+2x \geq -2$

5. Nguyên lý quy nạp (tt)

Bài 8: Ta có định nghĩa về giới hạn của dãy số: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

nếu với mọi số thực $\varepsilon > 0$ cho trước bé tùy ý, có thể tìm được chỉ số $N(\varepsilon)$ sao cho với mọi $n > N(\varepsilon)$ thì $|x_n - a| < \varepsilon$

a) Hãy viết lại định nghĩa trên bằng mệnh đề với các kí hiệu logic

b) Tìm dạng phủ định của mệnh đề trên

c) Chứng minh: với dãy $\{x_n\} = (-1)^n$, không tồn tại giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

Bài 9: Ta có định nghĩa: Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại $x = a$ khi và chỉ khi:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Viết dạng phủ định của mệnh đề trên.

Bài tập

Bài 10: Dùng nguyên lý quy nạp, chứng minh:

$$a) 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$b) 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$